

# 高強度アンボンドブレース性能評価の 解析的アプローチ

## ～アンボンドブレースの適用範囲拡大に向けた取組～

Ultimate States Evaluation of Unbonded Braces with High-Strength Steel Core  
～Effort for the expansion of Unbonded Braces' applicable range～

寺嶋 正雄 Masao TERASHIMA

都市インフラセクター 建築本部  
設計技術部 商品技術室 マネジャー  
Ph.D

### 抄 録

アンボンドブレース(以下 UBB)は圧縮荷重が作用しても座屈せず、安定した履歴性状を示すことから、開発以来30年以上にわたり国内外の多くの建物の耐震・制振部材として用いられてきた。近年、超高層建物の耐震要素として使われるなど、より幅広い用途に適用されるようになり、実大試験と共に数値解析による包括的な性能検証へのニーズが高まりつつある。そこで、有限要素解析及び破壊力学を用いて、これまで载荷試験で確認された4つの終局モードを包括的に再現できる手法を構築する。また、本稿では特に中心鋼材の破断に焦点を絞り、高強度材を用いた大軸力試験で確認された破断の評価を実施し、評価手法の妥当性を確認する。

### Abstract

In the past few decades, Unbonded Braces(UBBs) have been widely implemented in steel-framed structures throughout the world. Since UBBs do not buckle under compressive loading, they display stable behavior in tensile and compressive excursions. Recent years, UBBs have been applied to variety of structures as primary lateral-force resisting systems, such as outriggers for high-rise buildings and energy dissipating devices. Accordingly, there are increasing needs to develop numerical methodologies to comprehensively evaluate UBB ultimate states, along with full-scale experiments. Motivated by the needs mentioned above, this study develops a computational methodology to evaluate four typical ultimate states observed in past experiments using Finite Element Analysis and fracture mechanics. Then, this paper especially focuses on validating the fracture of the steel core using UBB large-scale experimental results with high-strength steel cores.

## 1 はじめに

### 1.1 アンボンドブレースとは

図1にアンボンドブレース(以下 UBB)の基本構

成を示す。アンボンドブレースは中心鋼材と座屈拘束材と呼ばれるモルタル及び鋼管で構成される。ブレースに伝わる軸力(引張・圧縮力)は中心鋼材が負担し、圧縮力作用下では座屈拘束材が中心鋼材を座

屈拘束する。中心鋼材とモルタルの間にはアンボンド材といわれる特殊な材料を施工することで、中心鋼材の軸力が座屈拘束材に伝達されない。このようなメカニズムにより、引張・圧縮耐力がほぼ同等で安定した弾塑性履歴特性を持つ耐震・制振部材である。



図1 アンボンドブレースの基本構成  
Fig 1. Configuration of Unbonded Brace

UBBは1980年代に当社により開発されて以来、累計10万本以上の販売実績を誇り、近年では国内外の地震多発地域で幅広い用途で使用されている。その一例として、超高層ビルのアウトリガー部分に採用されるなど、降伏軸力で10,000kNを超えるような大軸力UBBへのニーズが高まりつつある(例: Wilshire Grand Center 図2)。このような大軸力UBBでは、試験機容量の制限などにより、実大試験をすることが困難であるため、理論検討や数値解析などによる包括的な安全性の検証がより重要となる。

そこで、本稿ではUBBの大軸力領域への適用範囲拡大に向けた取り組みのうち、特に有限要素解析(以下、FEM)及び破壊力学によるUBBの終局モード(限界性能)の評価手法確立への取組を紹介する。



図2 Wilshire Grand Center(米・ロサンゼルス)10,000kNクラスのUBBが使用された米・西海岸で最も高いビル(335m)<sup>1)</sup>  
Fig2. Wilshire Grand Center(Los Angeles, USA), the tallest building in the western U.S. (335m). 10,000kN-UBBs are implemented

## 1.2 座屈拘束メカニズム

図3にUBBの座屈拘束メカニズムを示す。上述のようにUBBは中心鋼材、モルタル及び鋼管で構成され、中心鋼材とモルタルの間にアンボンド材が施工されている。アンボンド材は柔らかく、中心鋼材の変形を拘束しないため、中心鋼材に圧縮力が作用すると、中心鋼材がアンボンド材の厚み分だけ面外方向に変形する。その後、中心鋼材がモルタルと接触することで中心鋼材の面外変形が抑制され全体座屈を防止する。さらに圧縮力が作用すると、中心鋼材はモルタルとの隙間で波打つような変形モードを示す(高次座屈)。

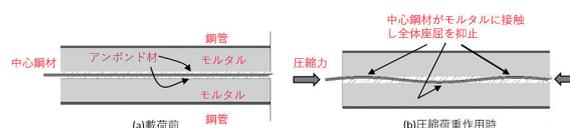


図3 座屈拘束のメカニズム(断面図)  
Fig3. Buckling-restraining mechanism (cross-section view)

## 1.3 アンボンドブレースの終局モード

続いて、これまでの载荷試験で確認されたUBBの主な終局モードについて説明する。全体系と局所系に大別され、座屈拘束材の座屈耐力が不十分な場合や、接合部やUBB端部の剛性・耐力が不十分な場合には図4(a)及び(b)のような全体系の座屈が発生することがある<sup>2)3)</sup>。また、モルタル及び鋼管側壁が中心鋼材の高次座屈を拘束しきれない場合は、鋼管内で中心鋼材の局部座屈が発生し、鋼管がはらみだす現象(バルジング)が発生する(図4(c))<sup>4)</sup>。これらのすべての終局モードが抑制された場合、UBBの塑性変形性能は中心鋼材の破断に

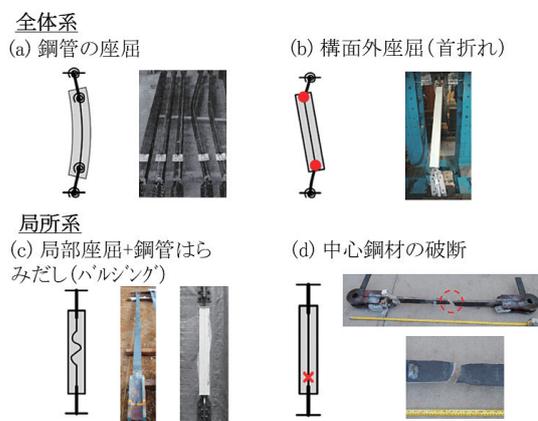


図4 UBBの主な終局モード  
Fig4. Schematics of UBB ultimate states

よって決定される。この終局モードが最も安定しており、繰返し変形性能が高いことから、最も望ましい終局モードであり、図4 (d)に至るまで(a), (b), (c)の終局モードが発現しないことがUBB安定性の条件となる。ここではこの4つの終局モードの発現を予測する手法をFEM及び破壊力学を用いて構築する。

## 2 アンボンドブレース終局モードの評価手法確立

### 2.1 有限要素解析手法

まずはFEMを用いて図4 (a)～(c)の再現を試みた。本解析にて用いた解析手法及び各要素の材料モデルの概要を表1に示す。有限要素解析には汎用有限要素解析ソフトABAQUS<sup>5)</sup>を用い、解析の収束性を考慮し陽解法を採用した。中心鋼材、モルタル及び鋼管はソリッド要素(C3D20R)でモデル化した。中心鋼材とモルタルの間はアンボンド材の厚み分だけ隙間を設け、中心鋼材とモルタル間に摩擦係数0.1の接触要素を設けることでアンボンド材の影響を模擬した。

表1 解析手法及び各要素の材料モデル  
Table 1 Analytical method and material models

解析手法	ABAQUS/Explicit(陽解法)
中心鋼材	Armstrong-Frederickモデル
鋼管	Tri-linearモデル
モルタル	Damage Plasticityモデル
アンボンド材	接触( $\mu=0.1$ )

図5にFEMの結果例を示す。図5 (a), (b)及び(c)に示す終局状態をよく再現しており、過去の試験結果で確認された終局モードを精度よく評価できることを確認した。

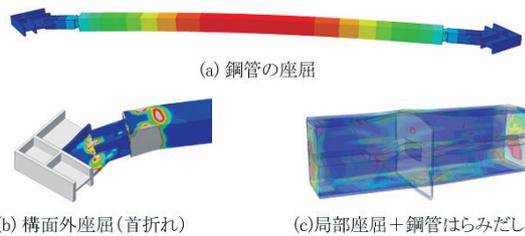


図5 FEM結果例  
Fig5. Example of FEM results

### 2.2 中心鋼材の破壊靱性評価手法

次に破壊力学を用いて中心鋼材の破断予測を試みた。一般にUBBを含む建築鋼構造物は大地震が発生すると大きな塑性変形を伴う繰返し変形を受けることになる。このような条件下では鋼材は数サイクル～数十サイクルで破断に至ることがあり、このような破断形式は極低サイクル疲労<sup>6)</sup>(Ultra Low Cyclic Fatigue, 以後ULCF)と呼ばれ、疲労破壊よりも延性破壊に近い性状を示すことが知られている。近年、複数の研究グループがULCF評価に取り組んでいるが、本稿では式(1)に示すSmithら<sup>7)</sup>が提案したStress Weighted Damage Model(SWDM)を採用した。

$$D_{SWDM} = e^{\lambda \bar{\epsilon}_{com}^p} \cdot \int_{\bar{\epsilon}_p} C (\beta e^{1.3T} - e^{-1.3T}) \cdot e^{\kappa |\xi|} d\bar{\epsilon}_p \quad (1)$$

$T$ ,  $\xi$ ,  $\bar{\epsilon}_p$ ,  $\bar{\epsilon}_{com}^p$ は破壊の起点となる局所応力・歪状態を表し、それぞれ応力三軸度, Lode Angle parameter(偏差応力の状態を示すパラメータ), 塑性歪, 圧縮応力作用時( $T < 0$ )の塑性歪である。 $C$ ,  $\beta$ ,  $\kappa$ 及び $\lambda$ は材料定数,  $D_{SWDM}$ は鋼材のULCFに対する損傷度合いを表すパラメータで,  $D_{SWDM}$ が1.0となった際にULCFによる鋼材の亀裂が発生するよう鋼材ごとに材料定数が決定される。ULCFのメカニズム及びSWDMの詳細な説明については<sup>7)</sup>を参照されたい。

## 3 高強度材を用いたアンボンドブレース大軸力試験の終局モード評価

本章ではUBB 載荷試験の結果を用いて上述の評価手法の妥当性を検証する。なお、ここでは紙面の都合上、中心鋼材破断評価に焦点を絞り検証した結果を紹介する。

### 3.1 検証に用いる試験概要及び結果

表2に検証に用いるUBB 載荷試験の概要及び試験結果を示す。試験体はいずれも当社の試験実績の中で最大規模である降伏軸力約11,000kNで、中心鋼材にはSN490B材及び高強度材であるBT-HT385B材(F値385N/mm<sup>2</sup>)及びBT-HT440B-SP(F値440N/mm<sup>2</sup>)材を用いた。SN490B材では中心鋼材切断

表2 試験概要及び結果一覧  
Table 2 Overview of the experiments

試験体	降伏軸力 (kN)	芯材									加工方法	載荷方法	中心鋼材の破断位置
		材質	形状	降伏応力 $\sigma_y$ N/mm <sup>2</sup>	板厚 $t$ (mm)	幅 $W_0$ (mm)	断面積 $A_c$ (mm <sup>2</sup> )	塑性化部長さ $L_c$ (mm)	芯材長さ $L_1$ (mm)				
490a	11,603	SN490B	+	370	80	236	31,360	2,400	3,800	機械加工	漸増+繰返 (±3.5%)	ずれ止め	
490b	11,603	SN490B	+	370	80	236	31,360	2,400	3,800	ガス切断	漸増+繰返 (±3.5%)	ずれ止め	
385a	11,128	BT-HT 385B	+	443	80	290	25,120	2,400	3,800	機械加工	漸増+繰返 (±3.5%)	塑性化部	
440a	11,120	BT-HT 440B-SP	+	500	80	270	22,240	2,400	3,800	機械加工	漸増+繰返 (±3.0%)	塑性化部	

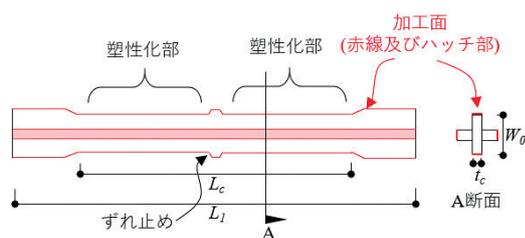
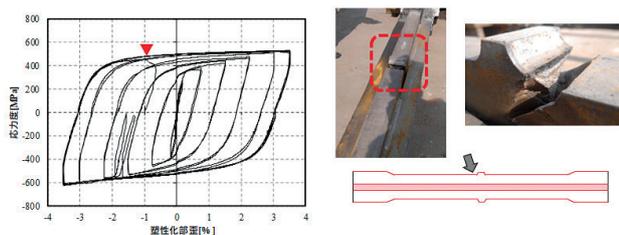


図6 中心鋼材形状  
Fig.6. Schematics of the steel core

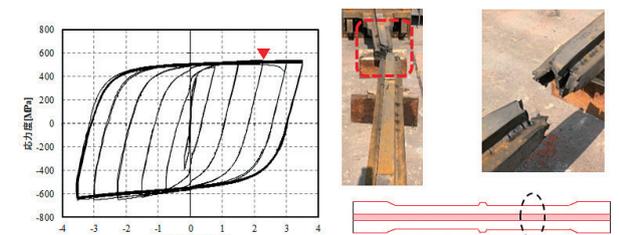
による入熱の影響を調べるために、ガス切断または機械加工にて成形した同形状の試験体を用意した(図6)。

図7に代表的な応力-歪履歴及び、載荷後の試験体状況を示す。本試験で確認された2つの破断モードを以下に詳述する。

(1) ずれ止め近傍の亀裂(図7(a))：中心鋼材中央



(a) 490a 試験体 (ずれ止め近傍の亀裂)



(b) 385a 試験体 (塑性化部の絞り)

図7 試験結果の例  
Fig.7. Example of the experimental results

部に設けたずれ止め近傍の加工面に亀裂が発生し進展することで鋼材が破断に至った。

(2) 中心鋼材の絞りによる塑性化部の破断(図7(b))：中心鋼材が大きな引張塑性変形を受けた際に塑性化部に絞りが発生し、塑性歪が局所的に集中することで破断に至った。

上述の(1)についてはFEMより得られる局所応力・歪及び、SWDMを用いて亀裂発生を予測することで中心鋼材の破断予測を試みた。(2)についてはFEMで塑性化部の絞りを再現することで終局モード評価を試みた。

### 3.2 中心鋼材の歪硬化則及びSWDMのキャリブレーション

載荷試験で確認されたUBBの終局モードを精緻に評価するためには、FEMにおいてUBBの挙動を詳細に再現するとともに、SWDM材料定数の正確なキャリブレーションが必要である。ここでは後述するFEMに用いる中心鋼材の歪硬化則及びSWDMの材料定数キャリブレーション手法について紹介する。

まず、中心鋼材に用いた鋼材の素材試験を実施した。試験体は円筒状試験体及び板状試験体(図8)からなり、試験体に設けた切欠(ノッチ)半径を変える

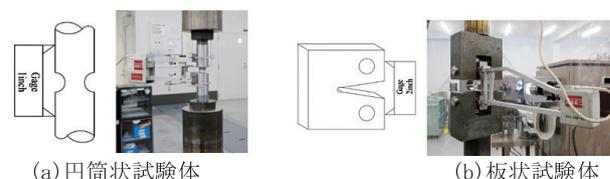


図8 素材試験の例  
Fig.8. Example of the material tests

ことで様々な応力状態を再現した。载荷履歴は単調引張及び、定振幅繰返し载荷とし、試験体がおおよそ10サイクル、20サイクル、30サイクルで破断に至るよう、3つの異なる振幅を与え、鋼材ごとに26種類の素材試験を実施した。

続いて、素材試験を用いて中心鋼材の歪硬化則のキャリブレーションを行った。硬化則は式(2)～式(5)に示す非線形複合硬化則(Armstrong-Frederick モデル<sup>5)</sup>)を採用した。

$$\sigma_Y = \sigma|_0 + \sigma_{iso} + \sigma_{kin,1} + \sigma_{kin,2} \quad (2)$$

$$\sigma_{iso} = Q_{\infty} (1 - e^{-b\bar{\epsilon}^p}) \quad (3)$$

$$\sigma_{kin,1} = \frac{C_1}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 \epsilon_p}) \quad (4)$$

$$\sigma_{kin,2} = \frac{C_2}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 \epsilon_p}) \quad (5)$$

式(3)が等方硬化則を、式(4)及び式(5)が移動硬化則を表す式で、これらと初期降伏応力( $\sigma|_0$ )との足し合わせにより降伏応力が決定される。 $\sigma|_0$ 、 $Q_{\infty}$ 、 $b$ 、 $C_1$ 、 $\gamma_1$ 、 $C_2$ 、 $\gamma_2$ は材料定数で、本稿では Particle Swarm Optimization (PSO) アルゴリズム<sup>7)</sup>を用いて素材試験と素材試験を模擬した FEM より得られた荷重-変形履歴との差異(Error)の累積が最小となる材料定数の組合せを同定した(表3)。

SWDM 材料定数は素材試験を基に、鋼材の破壊現象のランダム性を考慮し、確立論的手法である Maximum Likelihood Estimation (MLE)<sup>8)</sup>を用いてキャリブレーションを行った(表4)。

本項で紹介したキャリブレーション手法の詳細説明は<sup>9)</sup>を参照されたい。

表3 複合硬化則材料定数のキャリブレーション結果  
Table 3 Calibration results of the Armstrong-Frederick model

鋼種	$\sigma _0$	$Q_{inf}$	$b$	$C_1$	$\gamma_1$	$C_2$	$\gamma_2$
SN490	172.4	132.9	9.5	59349	242.5	1011.2	2.5
BT-HT385	209.1	58.3	6.5	125689	400.6	876.5	2.8
BT-HT440	246.6	79.0	6.7	136466	404.0	714.4	2.5

表4 SWDM 材料定数のキャリブレーション結果  
Table 4 Calibration results of the SWDM parameters

鋼種	$\beta$	$\kappa$	$\lambda$	$C$
SN490B	1.3	0.33	0.01	0.23
BT-HT385B	1.5	0.33	0.05	0.10
BT-HT440B-SP	1.5	0.33	0.07	0.10

続いて、ガス切断面より亀裂が発生した490b 試験体の破断評価を行うためガス切断による入熱の影響を調べた。一般に鋼材は溶接や切断などの入熱により、材料が硬化し破壊靱性が低下する傾向がある。本稿ではガス切断の入熱による硬化の影響を降伏応力の上昇により模擬し、破壊靱性の低下を SWDM 材料定数のうち、破壊靱性を表すパラメータである  $C$  を変化させることで模擬した。

ガス切断による熱影響部は幅数ミリであり、引張試験を実施し降伏応力( $\sigma_y$ )を同定することが困難であるため Vickers 硬さ試験を実施し、Pavlina ら<sup>10)</sup>が提案した硬さ値( $H_v$ )と降伏応力の関係式(式(6))を用いて降伏応力を推定した。

$$\sigma_y = -90.7 + 2.876H_v \quad (6)$$

図9にガス切断面近傍の硬さ試験結果及び降伏応力の推定値を示す。特にガス切断面から1mm程度の範囲が熱影響により硬化していることが分かる。この結果を基に、490b 試験体の FEM 解析を行う際に、ガス切断面より1mm以下の範囲にある要素の降伏点を推定値の平均値である1163N/mm<sup>2</sup>とすることで硬化の影響を解析的に模擬した。

次に、ガス切断の入熱による破壊靱性への影響を調べるため、図8(b)の板状試験体と同形状でノッチ部分をガス切断にて成形した要素試験体の単調引張試験及び繰返し载荷試験を実施した。本試験体では図10に示すようにノッチ部(つまりガス切断面)より亀裂が生じることから熱影響部の破壊靱性評価に適した試験体と言える。図10にノッチ部をガス切断及び機械加工にて成形した板状試験体の試験結果を比較した一例を示す。ガス切断で成形した試験体では機械加工で成形した試験体に比べ、入熱による硬化の影響で荷重が高くなっている。また、ノッチ部に早期に亀裂が発生しており、入熱によりガス切断面の靱性が失われていることが確認できる。これらの試験結果を用いて、SWDM 材料定数のうち、破壊靱性の示す  $C$  パラメータの同定を本項に示した手順に従い実施した。結果  $C$  は0.685となり、これはガス切断の入熱により、破壊靱性が約1/3(=0.23/0.68)に低下したことを意味する。ガス切断面の亀裂発生評価を行う際はこの  $C$  値を用いることで入熱による破壊靱性低下の影響を考慮した。

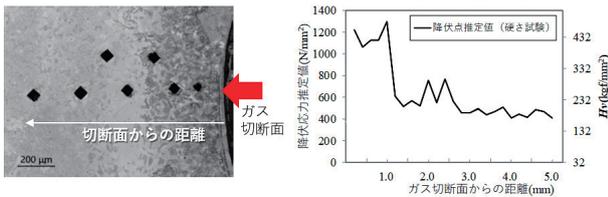


図9 ガス切断面近傍の降伏応力推定値  
Fig.9. Estimation of the yield stress around the gas cutting surface

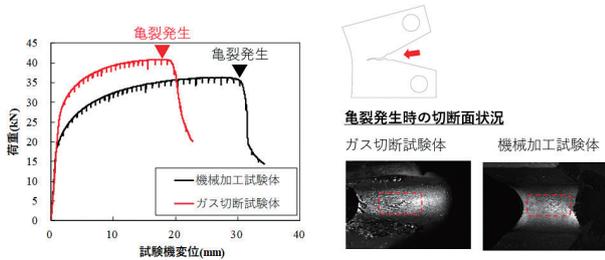


図10 ガス切断試験体と機械加工試験体の比較(板状試験体)  
Fig.10. Comparison of the gas-cut and machine-cut specimens (plate specimens)

### 3.3 UBB 終局モードの評価

最後に FEM 及び破壊力学を用いて3.1で紹介した荷重試験で確認された終局モードの評価を行う。図11に解析モデルを、図12に荷重試験と FEM より得られた荷重-変形関係の一例を示す。FEM は荷重試験で得られた荷重-変形履歴をよく再現しており、上述の FEM 手法及び中心鋼材の歪硬化則の妥当性が確認できる。

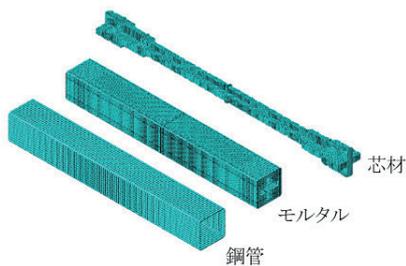


図11 解析モデルの一例  
Fig.11. Example of the FE model

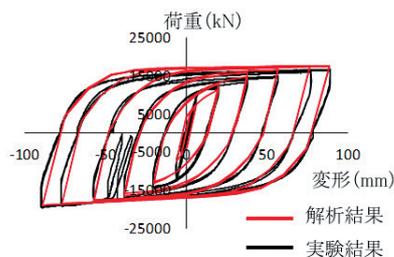


図12 荷重-変形関係の比較  
Fig.12. Comparison of the load-displacement relations

次に、荷重試験で確認された中心鋼材の破断評価結果一覧を表5に示す。

中心鋼材の絞りが確認された385a 及び440a 試験体に関しては FEM において絞りにより明瞭な荷重低下が発生した時点を終局状態と定義した(図13(a))。表5に示すように FEM は荷重試験で確認された中心鋼材の絞り発生タイミングを精度よく評価している。

中心鋼材ずれ止め近傍より亀裂が発生し破断に至った490a 及び490b 試験体は、SWDM 及び Myer<sup>11)</sup>が提案した確率論的手法により、荷重中のずれ止め近傍の亀裂発生確率を算出し、亀裂の発生確率が中央値である50%に達した時点を終局状態と定義した。図13(b)に示すようにずれ止め近傍では形状変化部に応力/歪集中がみられる。この応力/歪集中部を起点として ULCF による亀裂が発生し、中心鋼材が破断に至ったと考えられる。表5よりずれ止め近傍より亀裂が発生し破断に至ったいずれの試験体も SWDM により亀裂発生タイミングを精度よく評価していることが分かる。また、図13(b)に示すようにガス切断による入熱の有無により490a 試験体と490b 試験体では亀裂発生確率に大きな差が確認された。これは主に SWDM の *C* パラメータの違いに起因するもので、荷重試験で確認された両試験体の塑性変形性能の差が説明できる。

今回の試験では中心鋼材の鋼種によって破断位置が異なる結果となった。一般に絞り発生タイミングは鋼材の構成則による影響が大きく、降伏応力が高く、塑性化後の二次剛性が低いほど早期に絞りが発生する傾向がある。一方で応力/歪集中部での ULCF による亀裂発生タイミングは、応力/歪集中の程度と鋼材の ULCF に対する靱性に大きく影響される。よって、どちらの破断モードが出現するかは中心鋼材の形状、加工方法及び鋼種などにより異なる。今回の評価結果では、塑性化部の絞りが確認された385a 及び440a いずれの試験体においても、ずれ止め近傍の破断確率は10%以下であった。また、ずれ止め近傍で破断に至った490a 及び490b 試験体では、FEM においてもずれ止め破断確率が50%に至る前に中心鋼材の絞りは発生しなかった。以上より、本稿で提案した手法ではいずれの破断モードも精度よく評価できると言える。

表5 中心鋼材の破断評価結果  
Table 5 Evaluation results of UBB ultimate states

試験体	降伏軸力 (kN)	芯材		試験結果		本評価手法		中心鋼材の破断位置
		材質	加工方法	終局時のサイクル	CPD*1	終局時のサイクル	CPD*1	
490a	11,603	SN490B	機械加工	15サイクル (3.5%歪)	1014	12サイクル (3.5%歪)	928	ずれ止め
490b	11,603	SN490B	ガス切断	5サイクル (3.5%歪)	510	7サイクル (3.5%歪)	620	ずれ止め
385a	11,128	BT-HT385B	機械加工	9サイクル (3.5%歪)	613	11サイクル (3.5%歪)	687	塑性化部
440a	11,120	BT-HT440B-SP	機械加工	5サイクル (3.0%歪)	369	5サイクル (3.0%歪)	349	塑性化部

\* 1 : CPD =  $\frac{\sum \delta_p}{\delta_v}$   
累積塑性変形(Σδ<sub>p</sub>) / 降伏荷重時の変位(δ<sub>v</sub>)

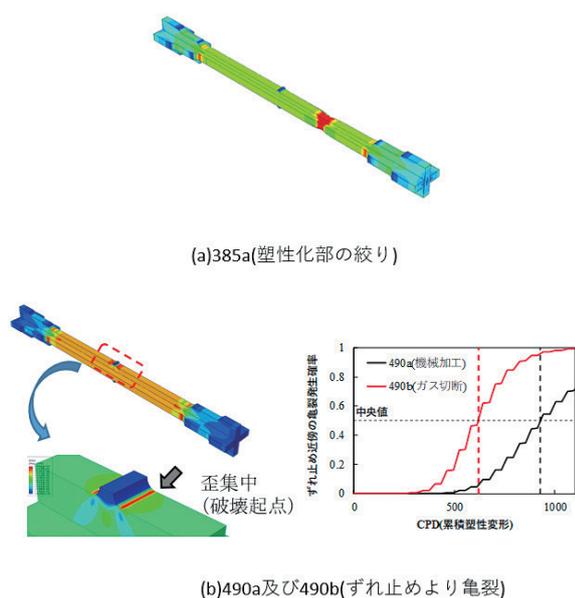


図13 中心鋼材の破断評価例  
Fig13. Evaluation results of ductile fracture in the steel core

## 4 まとめ

FEM 及び破壊力学を用いて、これまで载荷試験で確認された UBB の終局モードを包括的に評価できる手法を構築し、高強度材を用いた大軸力 UBB 試験を用いて中心鋼材破断評価手法の妥当性を確認した。顧客からの高い信頼獲得のためには実大スケールでの性能確認試験が重要であることは言うまでもないが、本論で提案した解析的手法を用いて安全性を検証することで、UBB がより広い用途で安全に適用される一助となれば幸いである。

## 参考文献

- 1) L. Joseph, C. K. Gulec, J. Schwaiger, and L. M. Joseph, "Wilshire Grand : Outrigger Designs and Details for a Highly Seismic Site," *Int. J. High-Rise Build.*, vol. 5, no. 1, pp. 1-12, 2016.
- 2) N. Fujimoto, A. Wada, E. Saeki, T. Takeuchi, and A. Watanabe, "Development of Unbonded Braces," *Quarterly Column*, vol. 115, pp. 91-96, 1990.
- 3) 竹内, 小崎, 松井, "拘束材端部の曲げモーメント伝達能力を考慮した座屈拘束ブレースの構面外安定性評価," *日本建築学会構造系論文集*, vol. 78, pp. 1621-1630, 2013, doi : 10.1002/eqe.2376.
- 4) 竹内, 松井, ハジャー, 西本, アイケン, "座屈拘束ブレースにおける芯材局部座屈の拘束条件," *日本建築学会構造系論文集*, vol. 73, no. 634, pp. 2231-2238, 2008, doi : 10.3130/aijs.73.2231.
- 5) ABAQUS, *Abaqus CAE User's Manual version 2017*. Dassault Systemes Simulia Corp, 2017.
- 6) A. Kanvinde and G. G. Deierlein, "Micromechanical Simulation of Earthquake-Induced Fracture in Steel Structures," 2004.
- 7) C. M. Smith, A. M. Kanvinde, and G. G. Deierlein, "A Stress-Weighted Damage Model for ductile fracture initiation in structural steel under cyclic loading and generalized stress states," 2014.
- 8) A. T. Myers, G. G. Deierlein, and A. Kanvinde, "Testing and Probabilistic Simulation of Ductile Fracture Initiation in Structural Steel Components and Weldments," 2009.
- 9) M. Terashima, "Ductile Fracture Simulation and Risk Quantification of Buckling-Restrained Braces Under Earthquakes," Stanford University, 2018.
- 10) E. J. Pavlina and C. J. Van Tyne, "Correlation of Yield strength and Tensile strength with hardness for steels," *J. Mater. Eng. Perform.*, vol. 17, no. 6, pp. 888-893, 2008, doi : 10.1007/s11665-008-9225-5.
- 11) A. T. Myers, A. M. Kanvinde, G. G. Deierlein, and J. W. Baker, "Probabilistic Formulation of the Cyclic Void Growth Model to Predict Ultralow Cycle Fatigue in Structural Steel," *J. Eng. Mech.*, vol. 140, no. 6, p. 04014028, 2014, doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000728.